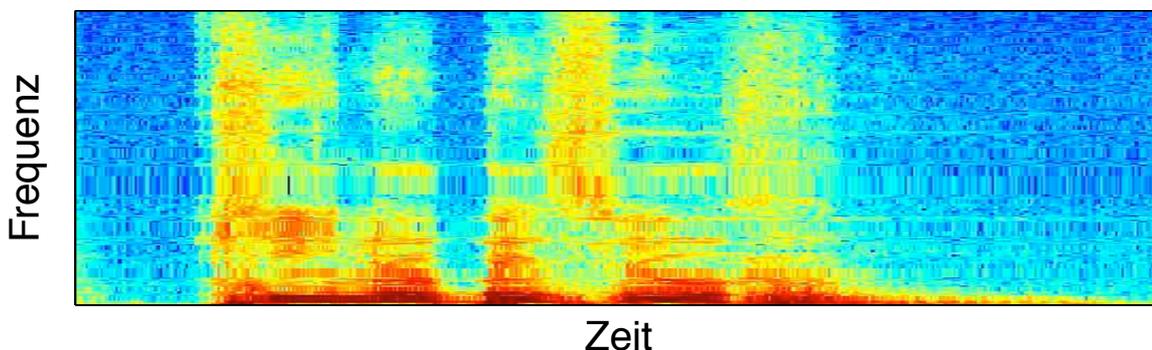


2. Kurzzeit-Fourier-Transformation

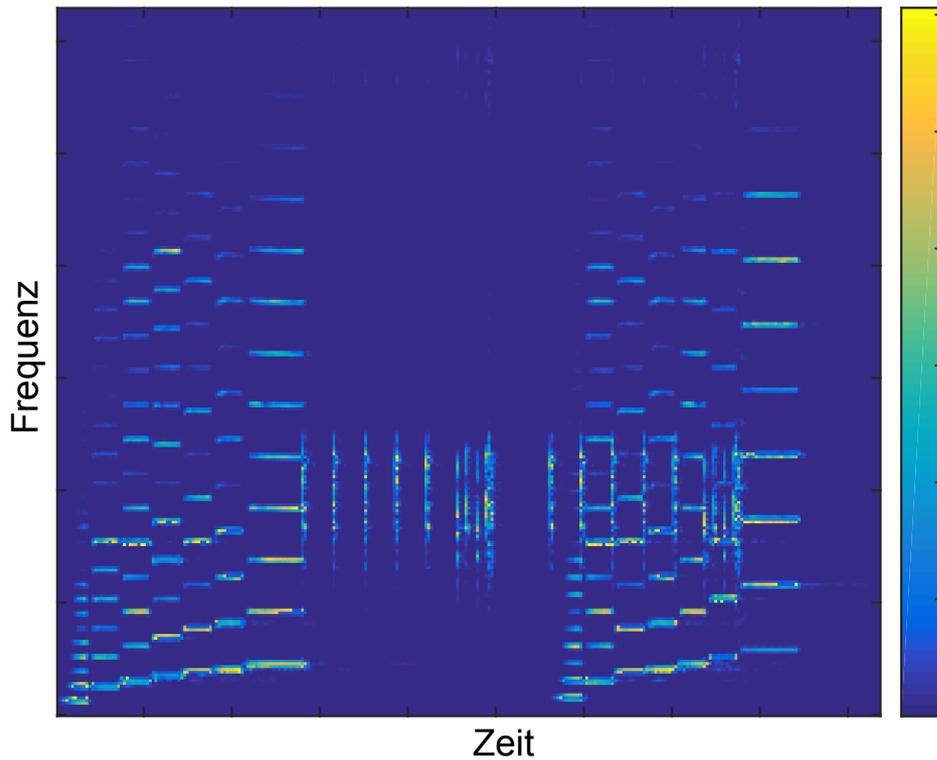
8. Kurzzeit-Fourier-Transformation

- Bei vielen realen Signalen ändert sich ihr Frequenzgehalt im Laufe der Zeit (oder des Ortes)
- Beispiele: Akustische Signale wie Sprache und Körperschall, Bilder...



- Analyseansatz: Betrachtung des Signals in kompakten Fenstern, die zeitlich und frequenzmäßig verschoben werden
- Problem: Unschärfe durch Fensterung → Anpassung an Signal
- Bei **Kurzzeit-Fourier-Transformation** (STFT): Auflösung des Fensters für alle Zeiten und Frequenzen gleich; lediglich Verschiebungen

Beispiel: Musiksignal



8.1 Kontinuierliche Kurzzeit-Fourier-Transformation (STFT)

8.1.1 Definition und Interpretationen

- **Klassische Fourier-Transformation:** Innenprodukt des zu analysierenden Signals $x(t)$ mit komplexen harmonischen Schwingungen:

$$X(f) = \langle x(t), e^{j2\pi ft} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

- Interpretation: Ähnlichkeit des Signals $x(t)$ mit harmonischer Schwingung der Frequenz f

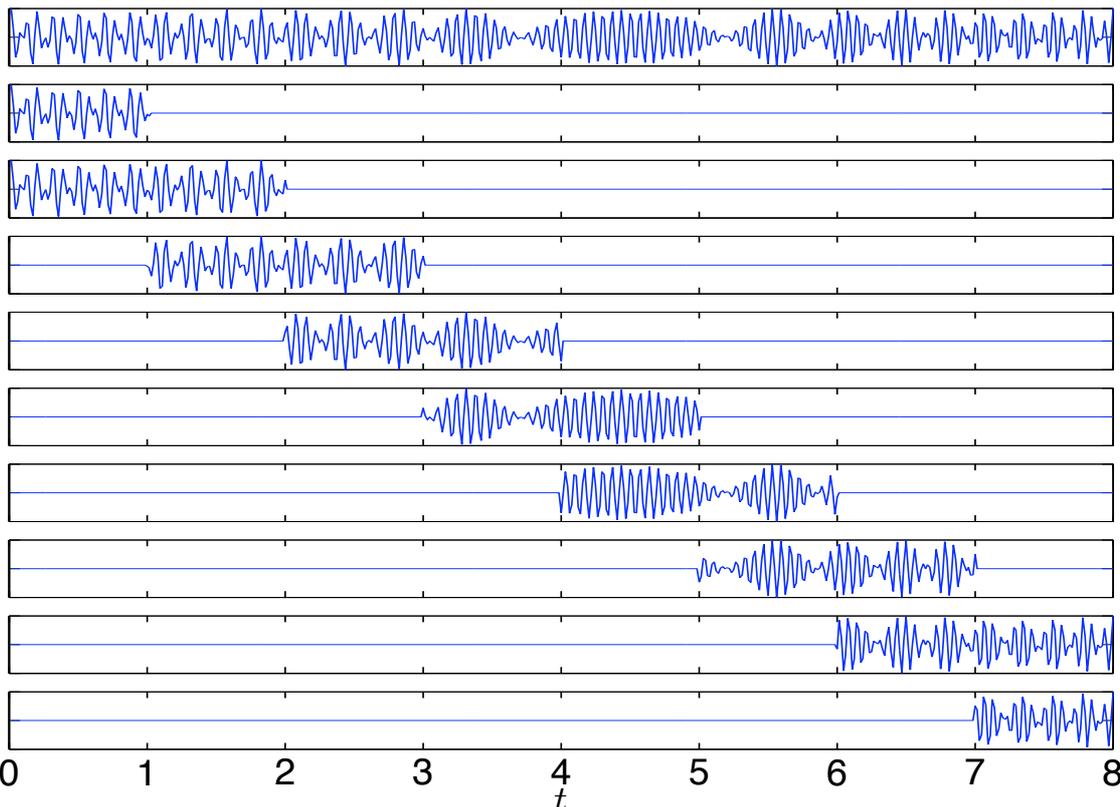
Definition: Kurzzeit-Fourier-Transformation (Interpretation I)

- Fourier-Transformation des gefenstereten Signals $x(t) \gamma^*(t - \tau)$:

$$F_x^\gamma(\tau, f) = \mathcal{F}\{x(t) \gamma^*(t - \tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \gamma^*(t - \tau) e^{-j2\pi ft} dt$$

- Interpretation: Ähnlichkeit des gefenstereten Signals mit der Harmonischen der Frequenz f

8.1.1 Definition und Interpretationen



■ Äquivalente Definition:

Definition: Kurzzeit-Fourier-Transformation (Interpretation II)

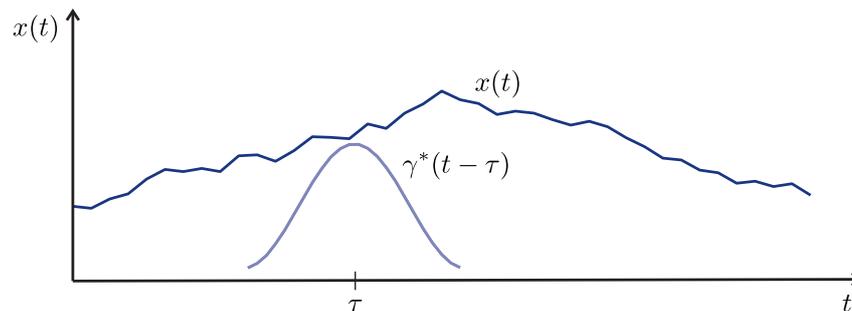
- Ähnlichkeit des Signals $x(t)$ mit zeit- und frequenzverschobenem Fenster $\gamma(t - \tau) e^{j2\pi ft}$:

$$F_x^\gamma(\tau, f) = \langle x(t), \gamma(t - \tau) e^{j2\pi ft} \rangle_t$$

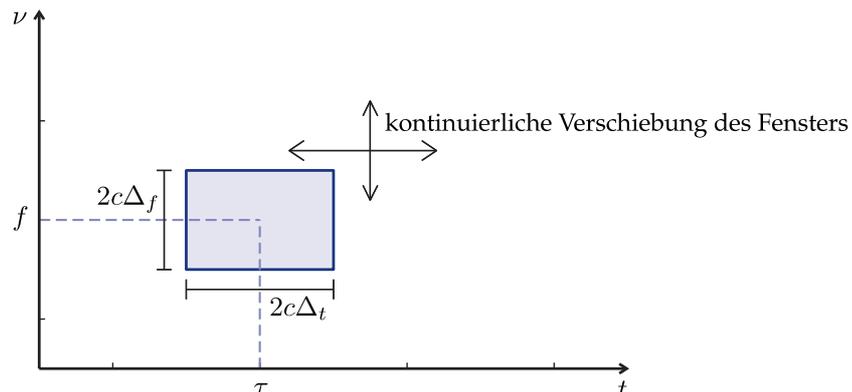
$$= \langle X(\nu), \Gamma(\nu - f) e^{-j2\pi(\nu - f)\tau} \rangle_\nu$$

- Zeitdauer und Bandbreite des Fensters sind invariant gegenüber den Verschiebungen τ und f (**Verschiebungsinvarianz**)
- Zeitdauer-Bandbreite-Produkt des Fensters durch Unschärferelation nach unten begrenzt
- Klassische Fourier-Transformation: Spezialfall mit $\Delta_t \rightarrow \infty$ und $\Delta_f \rightarrow 0$ (ideale Frequenzauflösung)

Interpretation I:
Fourier-Transformation
des gefensternten
Signals



Interpretation II:
Vergleich des Signals
mit zeit- und frequenz-
verschobenem Fenster



8.1.1 Definition und Interpretationen

- Die Umformung des Innenproduktes $\langle x(t), \gamma(t - \tau) e^{j2\pi f t} \rangle$ in eine Faltung führt zu einer weiteren Definition der STFT:

Definition: Kurzzeit-Fourier-Transformation (Interpretation III)

$$\begin{aligned}
 F_x^\gamma(\tau, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} \cdot \gamma^*(-(\tau - t)) dt \\
 &= x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} * \gamma^*(-\tau) \\
 &= \mathcal{F}_\nu^{-1} \left\{ \underbrace{X(\nu + f)}_{\text{demoduliertes Signal}} \cdot \underbrace{\Gamma^*(\nu)}_{\text{Tiefpassfilter}} \right\}
 \end{aligned}$$

- Interpretation:

- Demodulation** des Signals $x(t)$ (Frequenzverschiebung um $-f$) und
- anschließende **Tiefpassfilterung** (Frequenzintervall mit der Mittenfrequenz null wird „ausgeschnitten“)

8.1.1 Definition und Interpretationen

- Durch Ausklammern von $e^{-j2\pi f \tau}$ in der 2. Definition (Folie 7)

$$F_x^\gamma(\tau, f) = \langle X(\nu), \Gamma(\nu - f) e^{-j2\pi(\nu - f)\tau} \rangle_\nu$$

gelangt man zur 4. Definition der STFT:

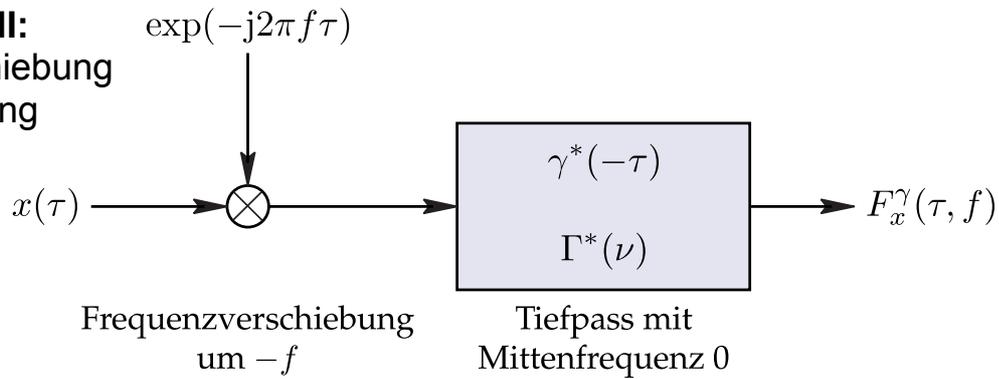
Definition: Kurzzeit-Fourier-Transformation (Interpretation IV)

$$\begin{aligned}
 F_x^\gamma(\tau, f) &= e^{-j2\pi f \tau} \int_{-\infty}^{\infty} X(\nu) \Gamma^*(\nu - f) e^{j2\pi \nu \tau} d\nu \\
 &= \underbrace{e^{-j2\pi f \tau}}_{\text{Demodulation}} \cdot \mathcal{F}_\nu^{-1} \left\{ \underbrace{X(\nu) \Gamma^*(\nu - f)}_{\text{Bandpassfilter}} \right\} \\
 &= e^{-j2\pi f \tau} \cdot (x(\tau) * \gamma^*(-\tau) j2\pi f \tau)
 \end{aligned}$$

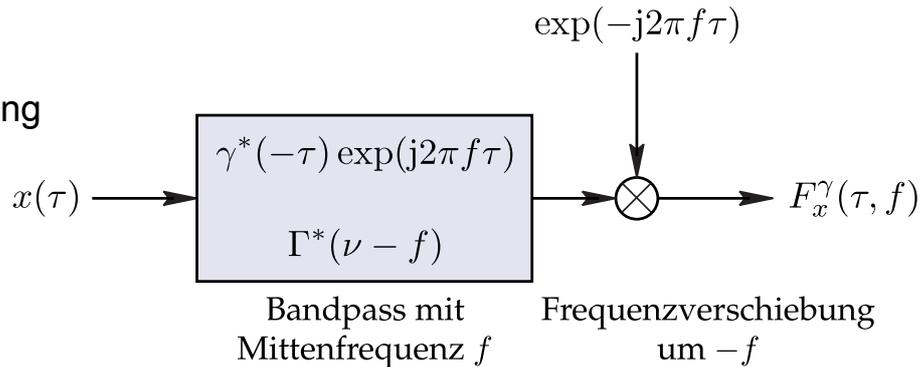
- Interpretation als **Bandpassfilterung** um die Frequenz f (Ausschneiden des betrachteten Frequenzintervalls) und anschließender **Demodulation** (Frequenzverschiebung um $-f$)

8.1.1 Definition und Interpretationen

Interpretation III:
Frequenzverschiebung
+ Tiefpassfilterung



Interpretation IV:
Bandpassfilterung +
Frequenzverschiebung



8.1.2 Spektrogramm

Definition: Spektrogramm

- Das **Spektrogramm** ist das Betragsquadrat der Kurzzeit-Fourier-Transformierten:

$$S_x^\gamma(\tau, f) = |F_x^\gamma(\tau, f)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \gamma^*(t - \tau) e^{-j2\pi ft} dt \right|^2$$

- Phaseninformation geht beim Spektrogramm verloren
- Wie bei der Fourier-Transformation ist die Phase bei der STFT in vielen Anwendungen von untergeordneter Bedeutung
- Die Energie des Spektrogramms ist gleich der Signalenergie [PK15]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_x^\gamma(\tau, f) d\tau df = \|x(t)\|^2$$

- Dies setzt voraus, dass die Signalenergie des Fensters $\gamma(t)$ auf 1 normiert wurde

8.1.3 Verschiebungsinvarianz

- Die STFT ist **invariant** gegenüber Verschiebungen von $x(t)$ um t_x oder f_x , d. h. aus einer Verschiebung des Signals $x(t)$ um t_x oder f_x folgt eine Verschiebung der STFT um t_x bzw. f_x

Zeitverschiebung um t_x :

$$x_0(t) = x(t - t_x)$$

$$\begin{aligned} F_{x_0}^\gamma(\tau, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_x) \cdot \gamma^*(t - \tau) e^{-j2\pi f t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \cdot \gamma^*(t' - (\tau - t_x)) e^{-j2\pi f (t' + t_x)} dt' \\ &= F_x^\gamma(\tau - t_x, f) e^{-j2\pi f t_x} \end{aligned} \quad t' = t - t_x$$

Die Transformierte bleibt **bis auf einen Modulationsfaktor** gleich.
Das Spektrum ist in der Zeitachse um die gleiche Zeit t_x verschoben.

8.1.3 Verschiebungsinvarianz

Frequenzverschiebung um f_x :

$$x_0(t) = x(t) e^{j2\pi f_x t}$$

$$F_{x_0}^\gamma(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \gamma^*(t - \tau) e^{-j2\pi (f - f_x) t} dt = F_x^\gamma(\tau, f - f_x)$$

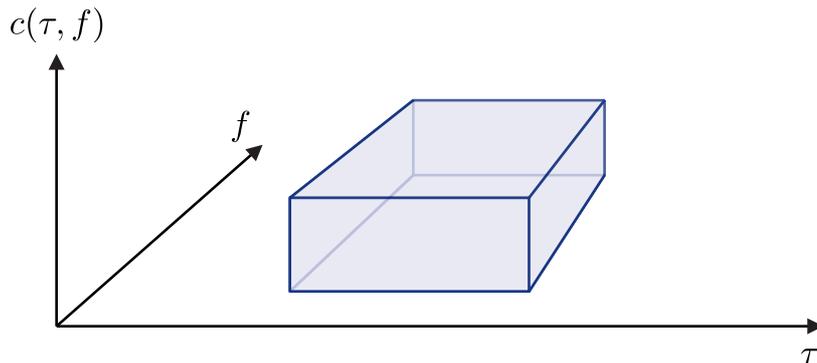
Das Spektrum ist in der Frequenzachse um die gleiche Frequenz f_x verschoben.

8.1.4 Rekonstruktion des Zeitsignals

- **Ansatz:** Darstellung von $x(t)$ als Linearkombination von zeit- und frequenzverschobenen **Synthesefunktionen** $\tilde{\gamma}(t - \tau) e^{j2\pi ft}$
- Koeffizienten werden zunächst allgemein mit $c(\tau, f)$ bezeichnet
- Infinitesimale Verschiebungen $d\tau$ und $df \rightarrow$ Integral statt Summe:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} c(\tau, f) \cdot \tilde{\gamma}(t - \tau) e^{j2\pi ft} d\tau df$$

- Rekonstruktion **nicht** immer möglich: Zu folgendem Spektrum existiert keine Zeitfunktion, da $c(\tau, f)$ im Zeit- und im Frequenzbereich begrenzt ist:



8.1.4 Rekonstruktion des Zeitsignals

- Bei Verwendung eines gültigen Kurzzeit-Spektrums $c(\tau, f) = F_x^\gamma(\tau, f)$ ergibt sich daraus die **inverse STFT**:

$$\hat{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_x^\gamma(\tau, f) \tilde{\gamma}(t - \tau) e^{j2\pi ft} d\tau df \quad (8.30)$$

- Welche Bedingung muss für das Analysefenster $\gamma(t)$ und das Synthesefenster $\tilde{\gamma}(t)$ gelten, um eine perfekte Rekonstruktion zu gewährleisten?
- Einsetzen der Kurzzeit-Fourier-Transformierten

$$F_x^\gamma(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \gamma^*(t' - \tau) e^{-j2\pi ft'} dt'$$

in die Rekonstruktionsgleichung (8.30) ergibt:

$$\begin{aligned}\hat{x}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \gamma^*(t' - \tau) \tilde{\gamma}(t - \tau) e^{j2\pi f(t-t')} df dt' d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \gamma^*(t' - \tau) \tilde{\gamma}(t - \tau) \delta(t - t') dt' d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \gamma^*(t - \tau) \tilde{\gamma}(t - \tau) d\tau\end{aligned}$$

- Mit der Substitution $t - \tau = \tau'$ erhält man

$$\hat{x}(t) = x(t) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\gamma}(\tau') \gamma^*(\tau') d\tau'$$

Bedingung für perfekte Rekonstruktion: $\langle \tilde{\gamma}(t), \gamma(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\gamma}(t) \gamma^*(t) dt \stackrel{!}{=} 1$

Diskussion

- Bedingung **wenig restriktiv**: bei gegebenem Analysefenster sind unendlich viele Synthesefenster möglich
- Üblich ist daher die Berücksichtigung zusätzlicher Kriterien wie:
 - Wahl **gleicher** Analyse- und Synthesefenster und **Normierung** der Fensterenergien auf 1
 - möglichst kleines **Zeitdauer-Bandbreite-Produkt**
- Häufige Verwendung des normierten Gauß-Impulses:

$$\gamma(t) = \tilde{\gamma}(t) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{\beta}{2}t^2\right)$$

Beispiel 8.3: Fourier-Transformation als Spezialfall der STFT

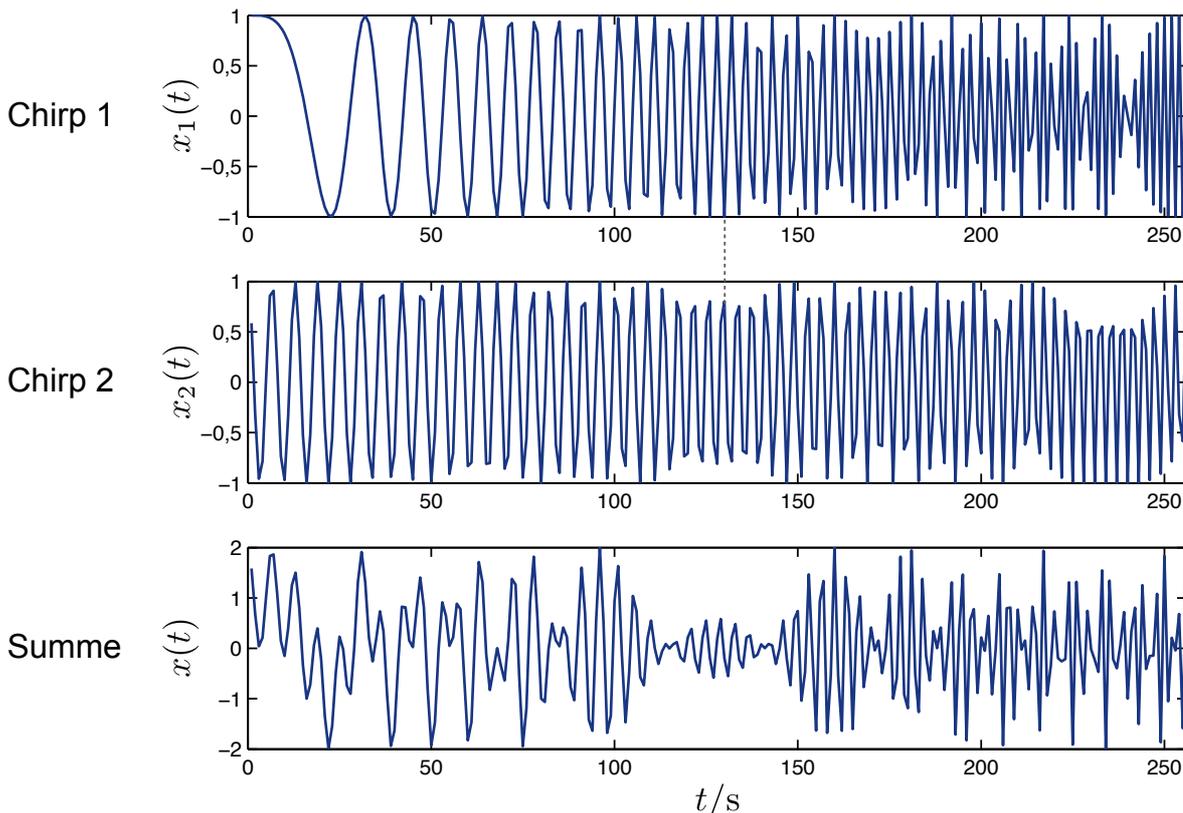
- Spezialfall der STFT mit unendlicher Fensterbreite (perfekter Frequenzauflösung):

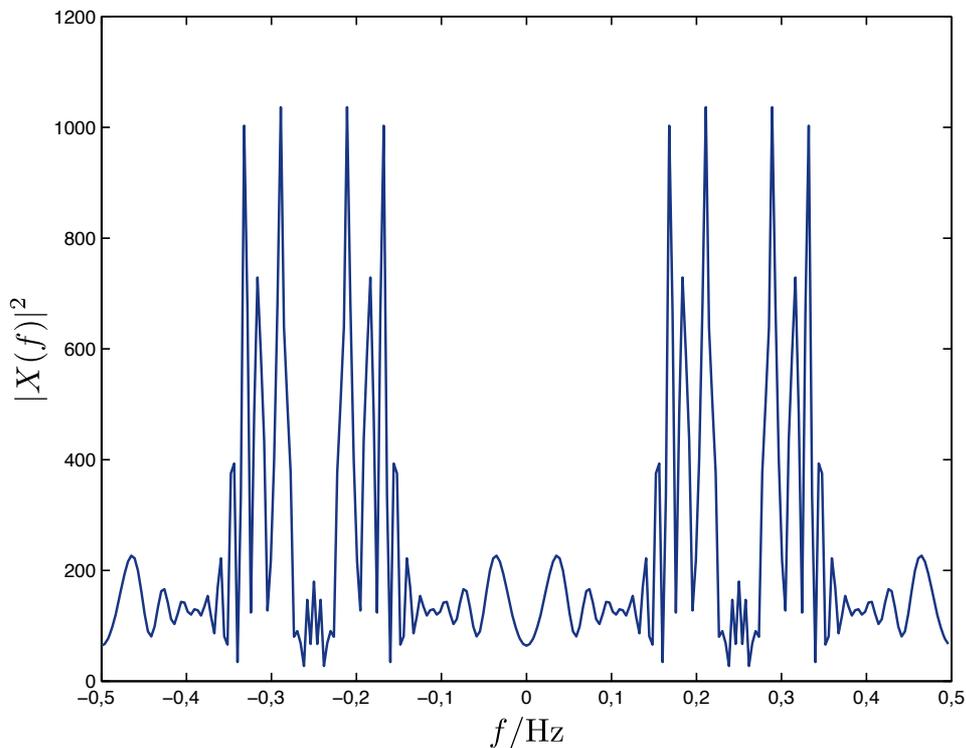
$$\gamma(t) = 1, \quad \Gamma(f) = \delta(f), \quad F_x^\gamma(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = X(f)$$



Beispiel 8.5: STFT zweier überlagerter Chirp-Signale

- Länge: $t = 256$ s
- Chirp 1: Frequenz steigt linear von $f_0 = 0$ Hz auf $f_{\text{Ende}} = 0,5$ Hz
- Chirp 2: Frequenz steigt linear von $f_0 = 0,15$ Hz auf $f_{\text{Ende}} = 0,35$ Hz
- Abtastfrequenz: $f_A = 1$ Hz



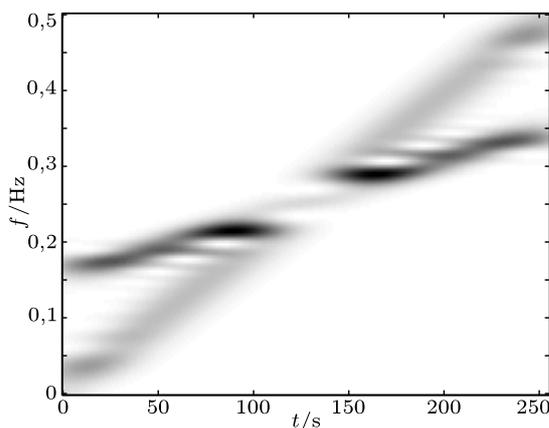
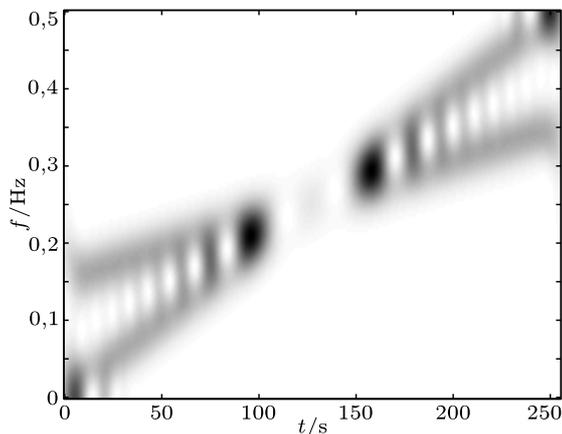


Periodogramm der Summe: Keine Information, **wann** welche Frequenz auftritt

- STFT-Analyse mit Gauß-Impuls als Fensterfunktion
- Fensterbreite bestimmt Auflösung in Zeit- und Frequenzrichtung

Fenster schmal: $T_{\text{eff}} = 4,1 \text{ s}$
 Gute Zeitauflösung
 Schlechte Frequenzauflösung

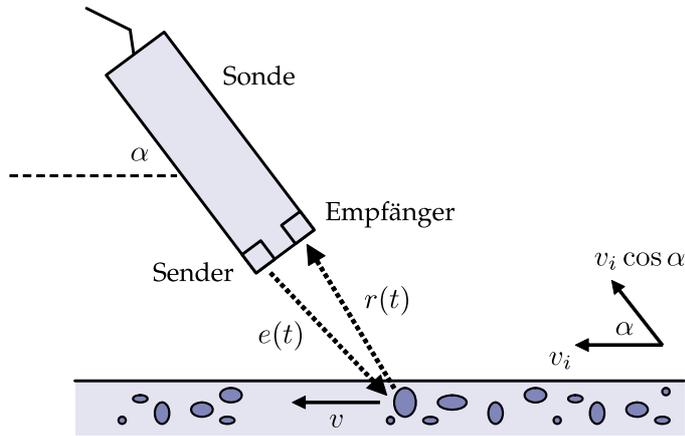
Fenster breit: $T_{\text{eff}} = 31 \text{ s}$
 Schlechte Zeitauflösung
 Gute Frequenzauflösung



Spektrogramme

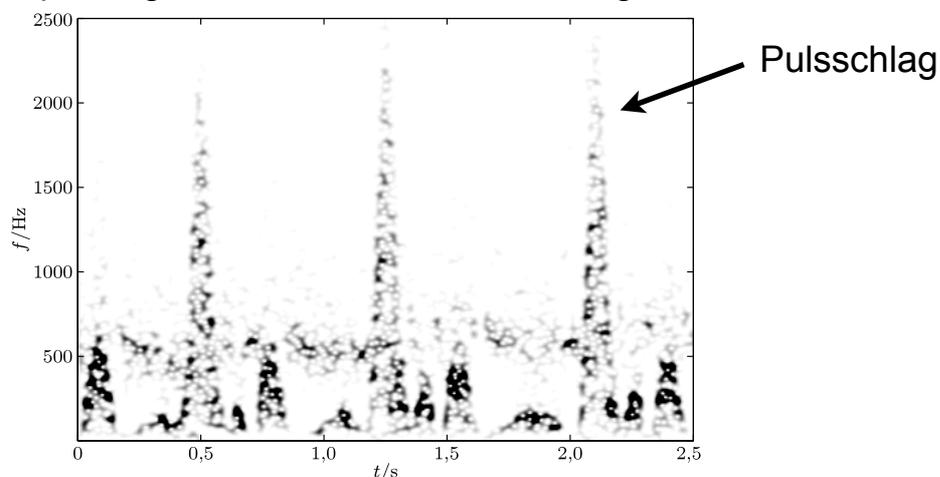
Beispiel 8.6: Ultraschall-Doppler-Messtechnik

- Nichtinvasive Messung der Blutflussgeschwindigkeit mittels Ultraschall:
 - Aussendung von akustischen Wellen der Frequenz f_0
 - Reflexion der Wellen an den Blutkörperchen (v. a. an den roten)
 - Frequenzverschiebung durch Doppler-Effekt
- Empfangssignal **instationär** (Pulsschläge) und **nicht-monochromatisch** (unterschiedlich schnelle Blutkörperchen) → STFT



- Trägerfrequenz $f_0 = 8 \text{ MHz}$
- Beobachtungszeit $T = 2,5 \text{ s}$

Spektrogramm des demodulierten Signals



- Doppler-Frequenz $f_i \approx 2250 \text{ Hz}$, Strahlwinkel $\alpha = \pi/4$
- Blutflussgeschwindigkeit $v_i = \frac{c \cdot f_i}{2 \cdot f_0 \cdot \cos \alpha} \approx 30 \text{ cm/s}$

8.2 Gabor-Reihe

8.2 Gabor-Reihe

8.2.1 Diskretisierung von Zeit- und Frequenzverschiebung

- Bisher: kontinuierliche Verschiebungen der mittleren Zeit τ und der mittleren Frequenz f
- Jetzt: **diskrete** Schritte $\tau = mT$ und $f = kF$ für das **Analysefenster**:

$$\gamma_{mk}(t) = \gamma(t - mT) e^{j2\pi kFt}$$

- Entspricht **Abtastung** des STFT-Spektrums
- In den Abtastpunkten erhält man folgende Koeffizienten:

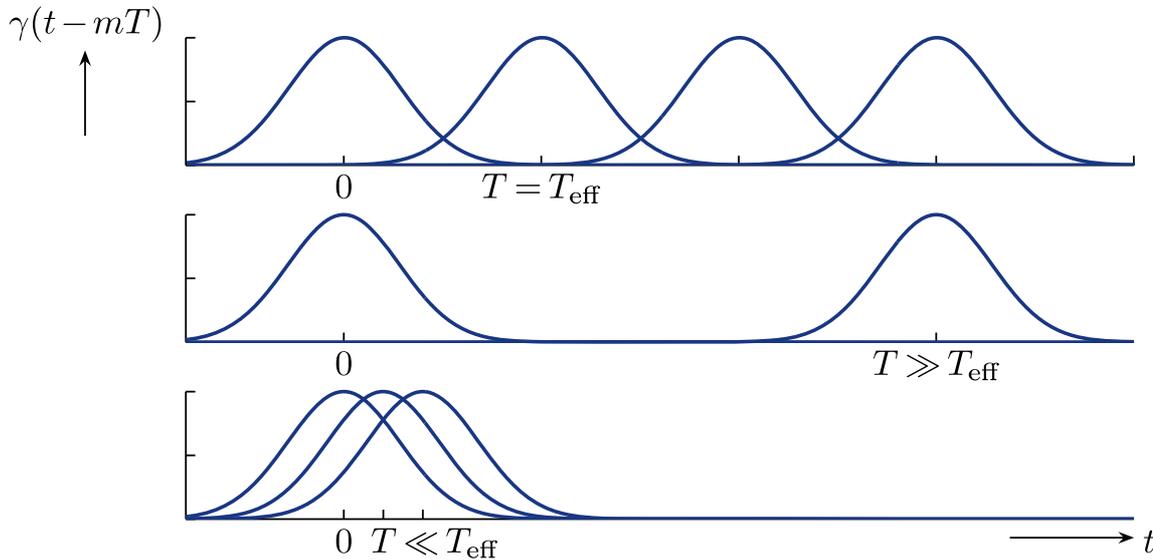
$$F_x^\gamma(m, k) = \langle x(t), \gamma_{mk}(t) \rangle_t = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \gamma^*(t - mT) e^{-j2\pi kFt} dt$$

Definition: Gabor-Reihe

Die Gabor-Reihe $\hat{x}(t)$ ist definiert als zweidimensionale Reihenentwicklung:

$$\hat{x}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_x^\gamma(m, k) \tilde{\gamma}_{mk}(t)$$

- Gabor-Reihe entspricht der Fourier-Reihe im eindimensionalen Fall
- Sinnvollerweise: $T \leq T_{\text{eff}}$ und $F \leq F_{\text{eff}}$, um die Zeit-Frequenz-Ebene hinreichend dicht abzutasten. Sonst: Informationsverlust!
- Dennis Gábor hat **Gauß-Impulse** als Analyse- und Synthesefenster verwendet, da diese im Zeit-Frequenz-Bereich am besten konzentriert sind:



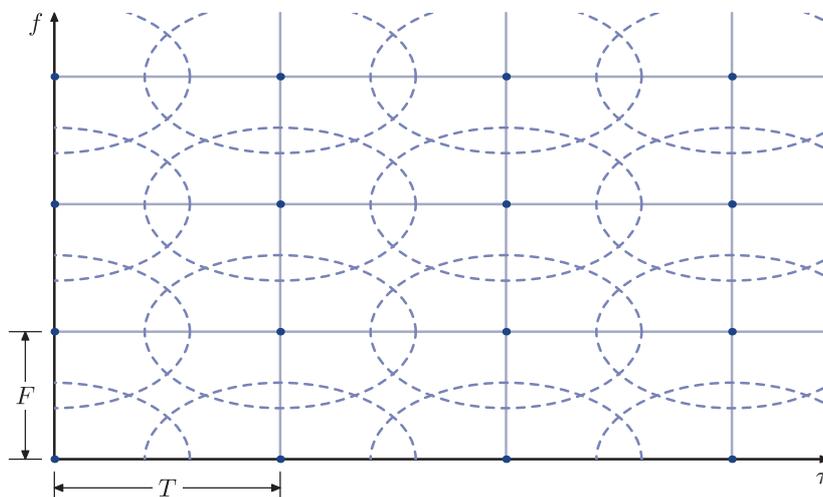
8.2.2 Abtasttheorem für die Zeit-Frequenz-Verteilung

- In Kapitel 7.3.6 wurde der folgende Satz gezeigt:

Satz: Abtasttheorem für die Zeit-Frequenz-Verteilung

Die diskreten Zeit- und Frequenzverschiebungsschritte müssen die Bedingung $T \cdot F \leq 1$ erfüllen.

- Dadurch wird sichergestellt, dass das Spektrum ausreichend häufig abgetastet wird.
- Wenn die Abtastschrittweite T vergrößert wird, muss F entsprechend verringert werden und umgekehrt.



- Der Fall $T \cdot F = T_{\text{krit}} \cdot F_{\text{krit}} = 1$ wird kritische Abtastung genannt.

- Einsetzen der Kurzzeit-Fourier-Transformierten in die Gabor-Reihe:

$$\begin{aligned}
 \hat{x}(t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_x^\gamma(m,k) \tilde{\gamma}_{mk}(t) \\
 &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \gamma^*(t' - mT) e^{-j2\pi k F t'} \tilde{\gamma}(t - mT) e^{j2\pi k F t} dt' \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \underbrace{\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma^*(t' - mT) e^{-j2\pi k F t'} \tilde{\gamma}(t - mT) e^{j2\pi k F t}}_{\stackrel{!}{=} \delta(t-t')} dt'
 \end{aligned}$$

Vollständigkeitsrelation

- Umformen mit Hilfe der Poisson'schen Summenformel liefert [PJ15]:

$$\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\gamma}(t) \gamma^*(t - m\alpha T) e^{-j2\pi k \alpha F t} dt = \delta_m \delta_k$$

Biorthogonalitätsbedingung für Synthese- und Analysefenster

- I. Allg. nicht analytisch, sondern nur numerisch lösbar → diskrete STFT

8.2.4 Gabor-Reihe als Frame

- Eine Signaldarstellung ist nur sinnvoll, wenn die **Frame-Bedingung** erfüllt ist:

$$0 < A \cdot \|x(t)\|^2 \leq \sum_m \sum_k |F_x^\gamma(m,k)|^2 \leq B \cdot \|x(t)\|^2 < \infty$$

- Dazu müssen Analyse- und Synthesefunktionen α -kompakt sein, d. h. die Summe ihrer Innenproduktbeträge muss auch bei Überabtastung endlich bleiben (Bsp.: Gauß-Impulse)
- Man kann zeigen, dass die Gabor-Reihe ein **dualer Frame** ist, bei dem Folgendes gilt [PJ15]:

$$0 < \frac{1}{\alpha \cdot S(\tilde{\gamma})} \|x(t)\|^2 \leq \sum_m \sum_k |F_x^\gamma(m,k)|^2 \leq \alpha \cdot S(\gamma) \cdot \|x(t)\|^2 < \infty$$

- Mit wachsender Überabtastung $\alpha > 1$ liegen die untere und obere Frame-Grenze weiter auseinander, d. h. die Koeffizienten repräsentieren weniger gut die anteilige Signalenergie

8.3 Diskrete Kurzzeit-Fourier-Transformation

8.3 Diskrete Kurzzeit-Fourier-Transformation

- In praktischen Anwendungen liegen zeitdiskrete Signale x_n vor
→ Übergang auf **diskrete** Kurzzeit-Fourier-Transformation

8.3.1 Definition

- Abtastung mit Abtastzeit t_A :
$$x_*(t) = \sum_{n=0}^{N-1} x(t) \delta(t - nt_A) \quad (8.125)$$

- Diskrete Zeitverschiebung T sei ganzzahliges Vielfaches der Abtastzeit:

$$T = \Delta M \cdot t_A$$

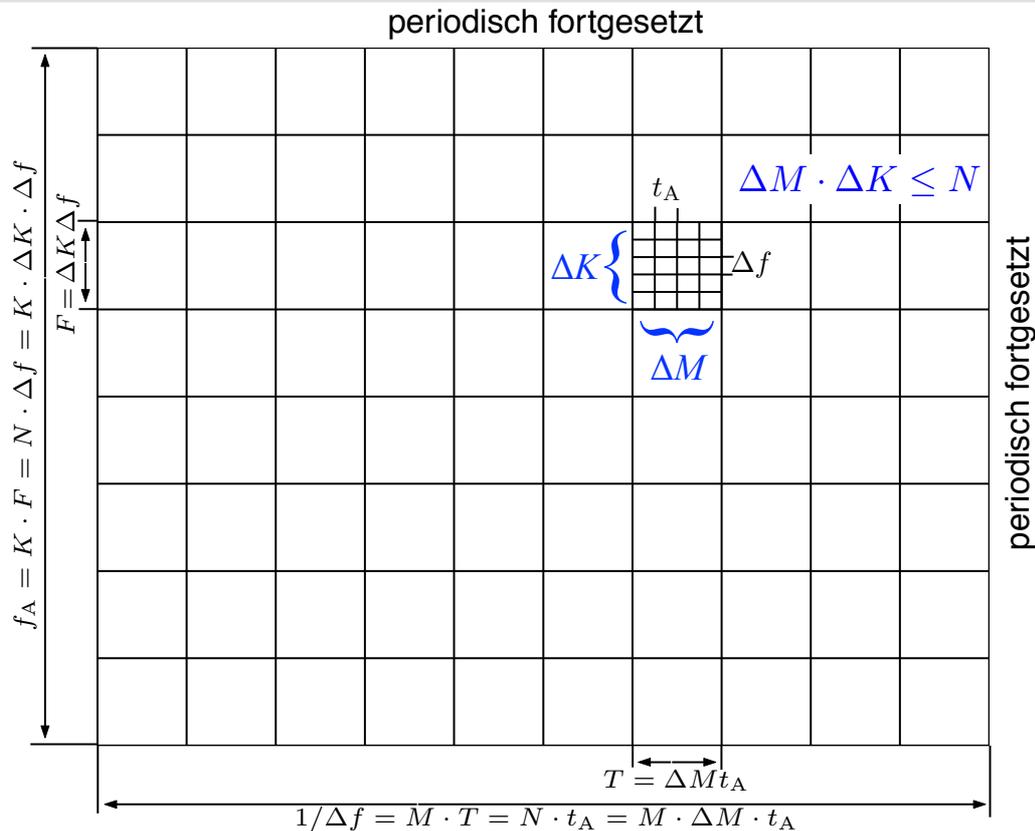
- Diskrete Frequenzverschiebung F sei ganzzahliges Vielfaches der Beobachtungsfrequenz:

$$F = \Delta K \cdot \Delta f = \Delta K \cdot \frac{f_A}{N}$$

- Aus dem **Abtasttheorem** für die Zeit-Frequenz-Verteilung der Gabor-Reihe folgt:

$$T \cdot F = \Delta M \cdot t_A \cdot \Delta K \cdot \Delta f \leq 1$$

$$\Delta M \cdot \Delta K \leq N$$



- Grad der Überabtastung:

$$\alpha = \frac{M \cdot K}{N} = \frac{\text{Zahl der Abtastpunkte in der Zeit-Frequenz-Darstellung}}{\text{Zahl der Abtastpunkte der zeitdiskreten Funktion}}$$

- Herleitung der **diskreten STFT** mit $\tau = mT$ und $f = kF$:

$$\begin{aligned}
 F_{x_*}^\gamma(\tau, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_*(t) \gamma^*(t - \tau) e^{-j2\pi ft} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{N-1} x(t) \delta(t - nt_A) \gamma^*(t - \tau) e^{-j2\pi ft} dt && \text{Einsetzen von } x_*(t) \text{ (8.125)} \\
 &= \dots = \sum_{n=0}^{N-1} x(nt_A) \gamma^*((n - m\Delta M)t_A) e^{-j2\pi kn/K} && t = nt_A \text{ wg. } \delta\text{-Impuls}
 \end{aligned}$$

$$F_{x_*}^\gamma(m, k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \gamma_{mk}^*[n] \quad \gamma_{mk}^*[n] : m/k\text{-verschobenes Fenster}$$

8.3.2 Rekonstruktion des zeitdiskreten Signals

- Rücktrafo mittels der zeit- und frequenzverschobenen **Synthesefenster**:

$$\tilde{\gamma}_{mk}[n] = \tilde{\gamma}_{n-m\Delta M} e^{j2\pi kn/K}$$

$$\hat{x}_n = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{K-1} F_{x_*}^\gamma(m, k) \tilde{\gamma}_{mk}[n]$$

$$= \dots = \sum_{k=0}^{\Delta K-1} x_{n-k \cdot K} \cdot \sum_{m=0}^{\Delta M-1} e^{j2\pi mn/\Delta M}$$

$$\cdot \underbrace{\frac{N}{\Delta K \cdot \Delta M} \sum_{n''=0}^{N-1} \gamma_{n''-k \cdot K}^* \tilde{\gamma}_{n''} e^{-j2\pi mn''/\Delta M}}_{\stackrel{!}{=} \delta_m \delta_k}$$

Einsetzen der disk. STFT & Umformen mit der Poisson'schen Summenformel

- Rekonstruktion möglich \Leftrightarrow Biorthogonalitätsbedingung erfüllt $\forall k, m$:

$$\alpha \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{\gamma}_n \underbrace{\gamma_{n-kK}^* e^{-j2\pi mn/\Delta M}}_{(\gamma_{km}^\alpha[n])^*} = \delta_m \delta_k, \quad \alpha = \frac{N}{\Delta K \cdot \Delta M}$$

8.3.3 Berechnung der Synthesefunktionen

- Mit $\gamma_{km}^\alpha[n] := \gamma_{n-kK} e^{j2\pi mn/\Delta M}$ kann die Orthogonalitätsbedingung als Innenprodukt geschrieben werden (Wexler-Raz-Beziehung):

$$\alpha \langle \tilde{\gamma}[n], \gamma_{km}^\alpha[n] \rangle_n = \delta_m \delta_k, \quad k = 0, \dots, \Delta K - 1, \quad m = 0, \dots, \Delta M - 1$$

- In Matrix-Notation:

$$\tilde{\gamma} := [\tilde{\gamma}_0 \dots \tilde{\gamma}_{N-1}]^T$$

$$\mu := [1/\alpha \ 0 \ \dots \ 0]^T$$

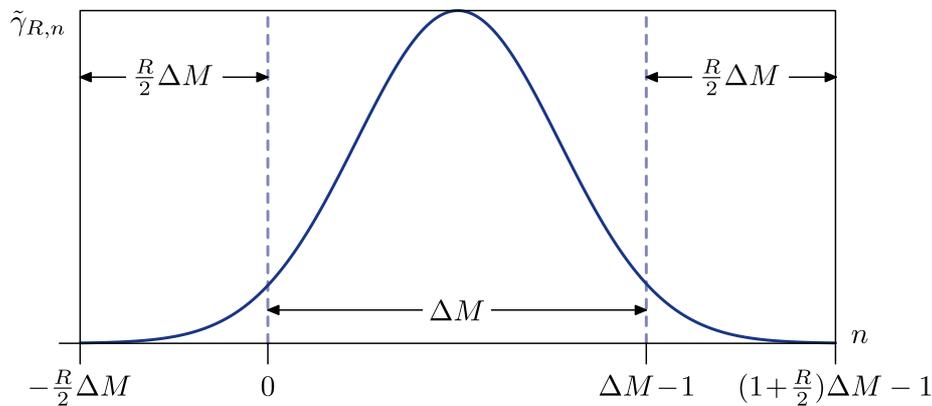
$$\Gamma^\alpha :=$$

$$\Rightarrow \Gamma^{\alpha*} \cdot \tilde{\gamma} = \mu$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{0,0}^\alpha[0] & \dots & \gamma_{0,0}^\alpha[N-1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{\Delta K-1,0}^\alpha[0] & \dots & \gamma_{\Delta K-1,0}^\alpha[N-1] \\ \gamma_{0,1}^\alpha[0] & \dots & \gamma_{0,1}^\alpha[N-1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{\Delta K-1,1}^\alpha[0] & \dots & \gamma_{\Delta K-1,1}^\alpha[N-1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{0,\Delta M-1}^\alpha[0] & \dots & \gamma_{0,\Delta M-1}^\alpha[N-1] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{\Delta K-1,\Delta M-1}^\alpha[0] & \dots & \gamma_{\Delta K-1,\Delta M-1}^\alpha[N-1] \end{bmatrix}$$

8.3.3 Berechnung der Synthesefunktionen

- Bei kritischer Abtastung $\alpha = N/(\Delta K \Delta M) = 1$ ist die Matrix Γ^α quadratisch
→ eindeutige Berechnung des Synthesefensters $\tilde{\gamma}_n$
- Kompaktheit: Konzentration der Signalenergie des Fensters auf Intervallbreite $(1 + R)\Delta M$ → Nullsetzen mancher Elemente von $\tilde{\gamma}_n$: $\Gamma_R^{\alpha*} \cdot \tilde{\gamma}_R = \mu$



- Im Normalfall ist das resultierende Gleichungssystem überbestimmt
→ Näherungslösung durch Minimierung der Fehlerquadrate (Pseudoinv.):

$$\hat{\tilde{\gamma}} = (\Gamma_R^{\alpha*\top} \cdot \Gamma_R^{\alpha*})^{-1} \cdot \Gamma_R^{\alpha*\top} \cdot \mu$$

8.3.3 Berechnung der Synthesefunktionen

Beispiel: Berechnung der Synthesefunktion aus der Analysefunktion

- Für eine diskrete STFT sind folgende Parameter gegeben:

Abtastpunkte der Zeitfunktion: $N = 512$

Zeit-/Frequenzverschiebung in t_A bzw. Δf : $\Delta M = \Delta K = 16$

Abtastpunkte in Zeit- und Frequenzrichtung: $M = K = 32$

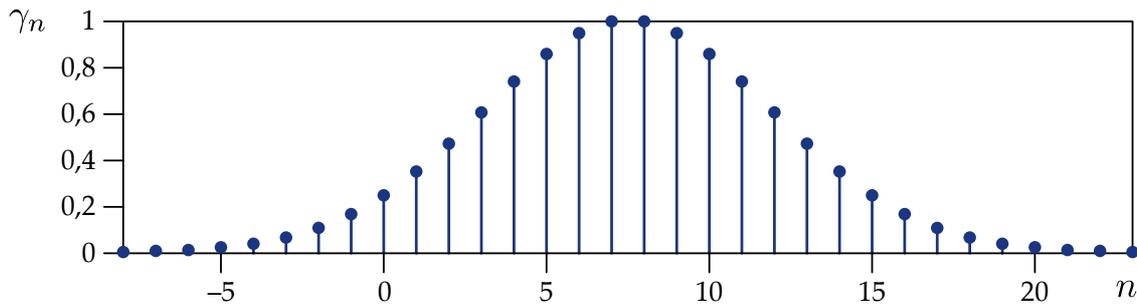
$$\Rightarrow \text{Überabtastfaktor: } \alpha = \frac{N}{\Delta K \Delta M} = 2$$

- Analysefenster: Gauß-Fenster, Beschränkung auf 32 Werte ($R = 1$)
- Wunsch: Berechnung eines Synthesefensters mit der Reserve $R = 1$

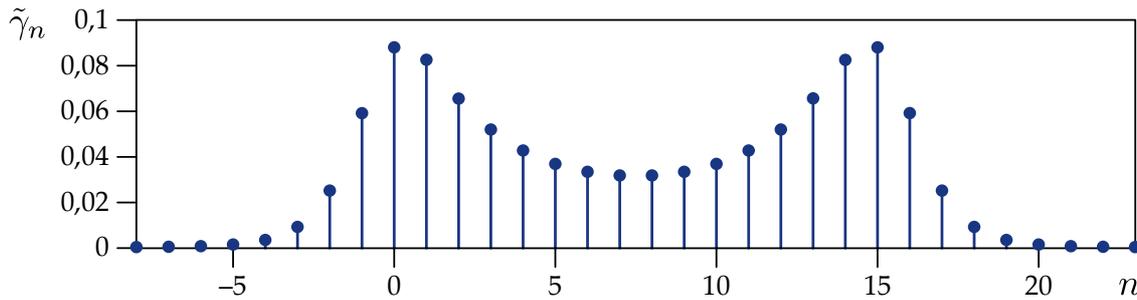
$\Delta M \cdot \Delta K = 256$ Gleichungen mit $N = 512$ Variablen

Beschränkung des Synthesefensters → 32 zu bestimmende Variablen

8.3.3 Berechnung der Synthesefunktionen



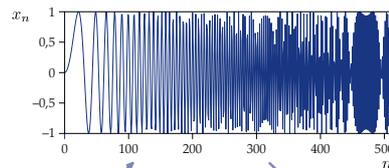
(a) Analysefenster



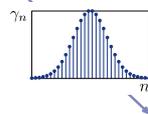
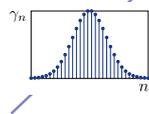
(b) Synthesefenster

8.3.3 Berechnung der Synthesefunktionen

Chirp-Signal

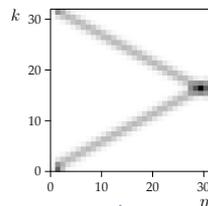
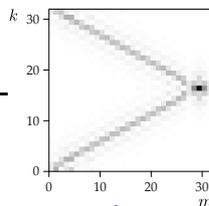


Chirp-Signal

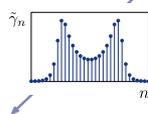
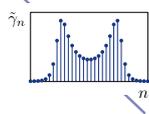


Analyse mit γ_n

Zeit-Frequenz-Darstellung

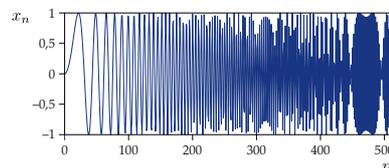


Zeit-Frequenz-Darstellung



Synthese mit $\tilde{\gamma}_n$

Chirp-Signal



Chirp-Signal